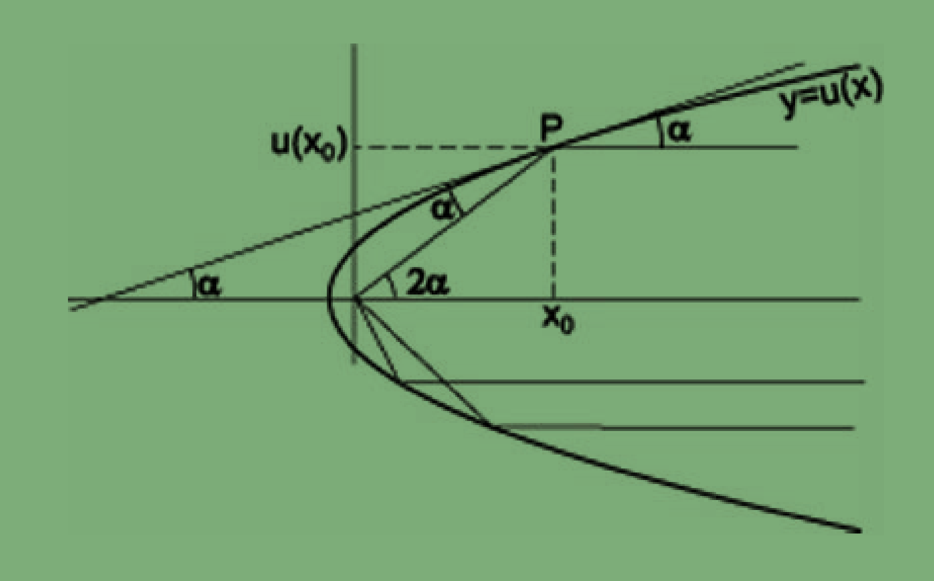
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN (II)

ALGUNAS APLICACIONES

por

M. Esther Patiño Rodríguez
Pedro Galán del Sastre



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-88-02

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN II

ALGUNAS APLICACIONES

por

M. ESTHER PATIÑO RODRÍGUEZ
PEDRO GALÁN DEL SASTRE

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-88-02

C U A D E R N O S
D E L I N S T I T U T O
J U A N D E H E R R E R A

NUMERACIÓN

2 Área
51 Autor
09 Ordinal de cuaderno (del autor)

TEMAS

1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN
0 VARIOS

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden II.
Algunas aplicaciones.

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Almudena Gil Sancho.
CUADERNO 377.01 / 3-88-02
ISBN-13 (obra completa): 978-84-9728-426-4
ISBN-13: 978-84-9728-428-8
Depósito Legal: M-24079-2012

Índice general

Algunas Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

1. Problemas geométricos

Existe una gran variedad de problemas geométricos en los que aparecen la recta tangente o la recta normal a una curva. Si suponemos que la curva viene dada por la gráfica de una función $y = u(x)$, es claro que, al estar presente la derivada de la función, $u'(x)$, en las ecuaciones de dichas rectas, surgirán problemas en los que será necesario resolver ecuaciones diferenciales. Veamos algún ejemplo que ilustre este hecho.

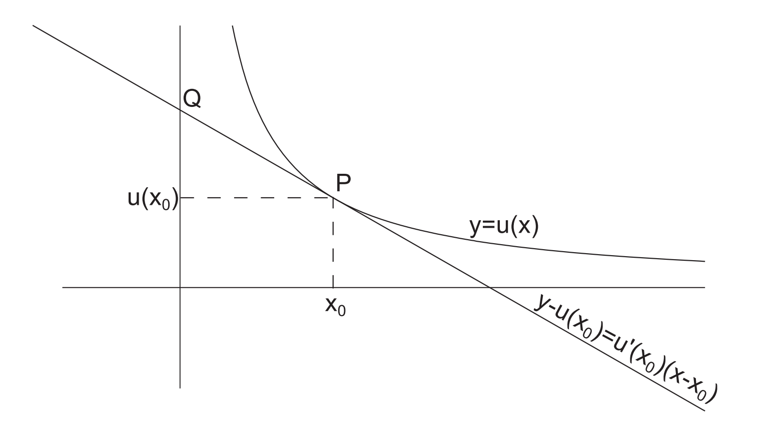


Figura 1: Recta tangente a una curva en un punto.

Ejemplo 1.1 *Hallar la familia de curvas que verifican que la pendiente de la recta tangente en cada punto P de la curva es igual a la suma de las coordenadas de dicho punto. De todas ellas, determinar la curva que pasa por el punto (0,2).*

Supongamos que $u(x)$ es la función que define una curva de la familia que queremos encontrar y sea P un punto cualquiera, fijo pero arbitrario, de esa curva. Entonces, $P = (x_0, u(x_0))$ para algún x_0 (ver Figura 1). La pendiente de la recta tangente a la curva en P es $u'(x_0)$, de modo que, aplicando las condiciones geométricas propuestas en el enunciado

del problema, la ecuación diferencial que define la familia buscada viene dada por la ecuación diferencial lineal

$$u'(x_0) = x_0 + u(x_0).$$

Esta ecuación se verifica para cualquier punto $(x, u(x))$ de cada curva de la familia, por tanto se tiene

$$u'(x) = x + u(x), \qquad (1)$$

que es una ecuación diferencial lineal. Resolvemos la ecuación diferencial homogénea asociada:

$$u'_H(x) = u_H(x)$$

cuya solución general es

$$u_H(x) = Ke^x.$$

Aplicamos ahora el *método de variación de las constantes* para resolver la ecuación completa, es decir, buscamos la función $K(x)$ para que $u_P(x) = K(x)e^x$ sea solución de la ecuación (1). Así obtenemos que

$$K'(x) = xe^{-x}$$

de cuya integración resulta

$$K(x) = -(1+x)e^{-x} + C.$$

Por tanto, la familia uniparamétrica que cumple la condición geométrica planteada es

$$u(x) = -(1+x) + Ce^x. \qquad (2)$$

Dado que se pide determinar la curva que pasa por el punto (0,2), se tiene que verificar que

$$2 = u(0) = -1 + C \quad \Longleftrightarrow \quad C = 3,$$

obteniéndose que la curva solución buscada tiene por ecuación

$$u(x) = -(1+x) + 3e^x. \qquad (3)$$

La Figura 2 muestra la representación gráfica de varias curvas de la familia definida en (2) y entre ellas, la correspondiente a la solución particular (3).

Ejemplo 1.2 *Encontrar la familia de curvas en el primer cuadrante con la siguiente propiedad: la ordenada del punto de corte de la recta tangente en cualquier punto de la curva con el eje OY es igual al producto de la abcisa por el cuadrado de la ordenada del punto de tangencia. De todas ellas, encontrar la que pasa por el punto (1,1).*

Supongamos que $u(x)$ es una curva de la familia buscada y sea P un punto cualquiera de $u(x)$ cuyas coordenadas denotamos por $P = (x_0, u(x_0))$ (véase la Figura 1). La ecuación de la recta tangente en el punto P es

$$y - u(x_0) = u'(x_0)(x - x_0).$$

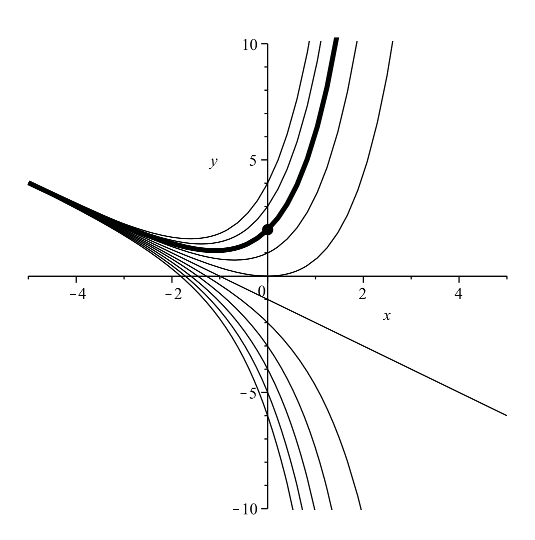


Figura 2: Familia uniparamétrica de soluciones y solución particular.

Las coordenadas del punto de corte de la recta tangente con el eje OY, llamémosle Q, se determinan resolviendo el sistema

$$\begin{cases} y - u(x_0) = u'(x_0)(x - x_0), \\ x = 0. \end{cases}$$

Por tanto, la ordenada de Q es

$$y_Q = u(x_0) - x_0 u'(x_0).$$

Aplicando la condición geométrica del enunciado, se tiene que:

$$u(x_0) - x_0 u'(x_0) = x_0 u(x_0)^2.$$

Puesto que esta expresión se verifica para cualquier punto de las curvas de la familia que queremos determinar, podemos escribirla en función de $(x, u(x))$ como

$$u(x) - xu'(x) = xu(x)^2.$$

Tenemos, entonces, una ecuación diferencial de tipo Bernoulli con $n = 2$. Aplicando el cambio de variable dado por $v(x) = u(x)^{-1}$, la ecuación anterior se expresará en función de $v(x)$ como

$$v(x) + xv'(x) = x,$$

siendo ésta una ecuación diferencial lineal. Se obtiene fácilmente la solución de la ecuación homogénea asociada:

$$v_H(x) = \frac{K}{x}.$$

Aplicando el *método de Lagrange*, llegamos a la solución general de la ecuación completa:

$$v(x) = \frac{x^2 + 2C}{2x}.$$

Deshaciendo el cambio obtenemos la familia uniparamétrica de funciones buscada:

$$u(x) = \frac{2x}{x^2 + 2C}. \tag{4}$$

Imponiendo ahora la condición inicial dada en el enunciado, la curva que pasa por (1,1) es

$$u(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}. \tag{5}$$

La Figura 3 muestra la representación gráfica de varias curvas de la familia definida en (4) y entre ellas, la correspondiente a la solución particular (5).

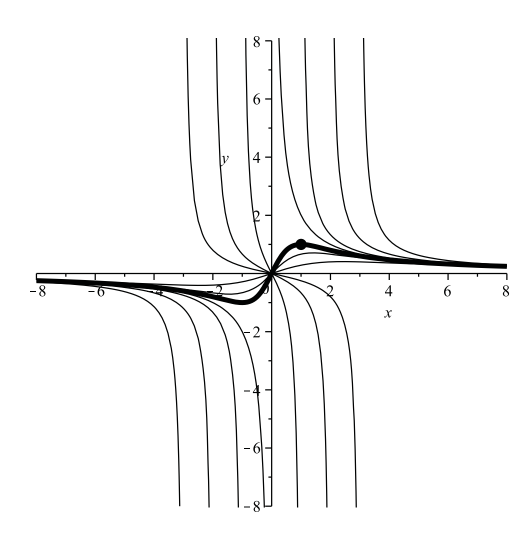


Figura 3: Familia uniparamétrica de soluciones y solución particular.

Ejemplo 1.3 *Sea P un punto genérico de una curva plana y Q el punto intersección con el eje OY de la recta normal a dicha curva en P. Hallar la familia de curvas planas que cumplen que el producto de las ordenadas de P y Q es igual al doble del cuadrado de la distancia de P al origen de coordenadas.*

Supongamos que $u(x)$ es una curva de la familia buscada y sea P un punto cualquiera de $u(x)$ de coordenadas $P = (x_0, u(x_0))$ (véase la Figura 4). La ecuación de la recta normal en el punto P es

$$y - u(x_0) = -\frac{1}{u'(x_0)}(x - x_0).$$

Las coordenadas del punto Q se determinan resolviendo el sistema

$$\begin{cases} y - u(x_0) = -\dfrac{1}{u'(x_0)}(x - x_0), \\ x = 0. \end{cases}$$

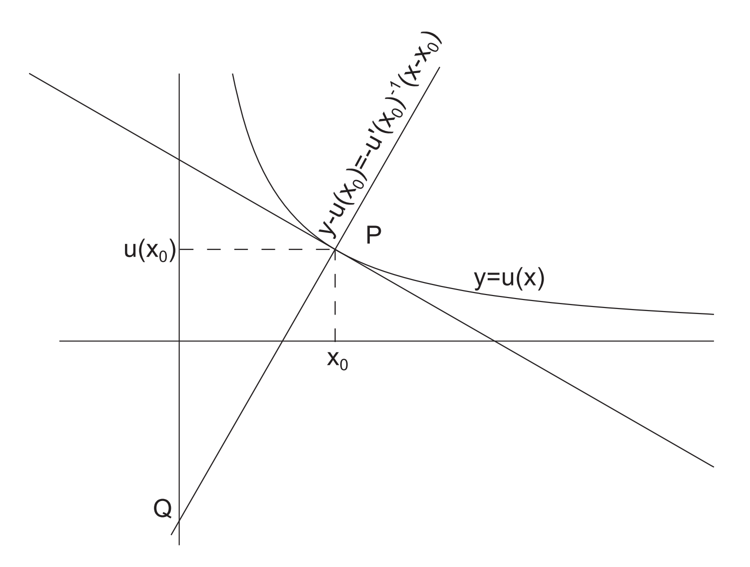


Figura 4: Recta normal a una curva en un punto.

Por tanto, la ordenada de Q es

$$y_Q = \frac{x_0}{u'(x_0)} + u(x_0),$$

y aplicando la condición geométrica dada en el problema, la ecuación diferencial que define la familia de curvas buscada, en un punto genérico $(x, u(x))$, es:

$$u(x)\left(\frac{x}{u'(x)} + u(x)\right) = 2(u(x)^2 + x^2).$$

Operando llegamos a que esta ecuación se expresa de forma equivalente por

$$u'(x) = \frac{xu(x)}{u(x)^2 + 2x^2},$$

que es una ecuación diferencial homogénea. Para su resolución se efectúa el cambio de variable $v(x) = \dfrac{u(x)}{x}$ para el que se tiene que $u'(x) = xv'(x) + v(x)$. Después de efectuar este cambio, la ecuación homogénea se escribe ahora como

$$xv'(x) + v(x) = \frac{v(x)}{2 + v(x)^2}.$$

Operando de nuevo, llegamos a una ecuación de variables separables

$$\frac{(2 + v(x)^2)v'(x)}{v(x) + v(x)^3} = -\frac{1}{x}.$$

La integral del lado izquierdo de la igualdad es

$$\int \frac{(2 + v(x)^2)v'(x)}{v(x) + v(x)^3} dx = 2\log v(x) - \frac{1}{2}\log(v(x)^2 + 1)$$

y la del lado derecho

$$\int -\frac{1}{x} = \log\frac{K}{x}.$$

Igualando ambos resultados y operando obtenemos

$$\frac{v(x)^2}{(v(x)^2+1)^{1/2}} = \frac{K}{x}$$

que, tras deshacer el cambio de variable aplicado nos permite obtener la familia uniparamétrica buscada. En forma implícita se expresa como:

$$\frac{u(x)^2}{(u(x)^2+x^2)^{1/2}} = K.$$

Ejercicios propuestos

Resolver los siguientes problemas geométricos:

1. Obtener la familia de curvas planas tales que para cualquier punto P de la curva, el segmento de la recta tangente comprendida entre los ejes coordenados queda dividido por el punto P en dos partes iguales.

Solución: $u(x) = \dfrac{K}{x}$

2. Por un punto genérico P de una curva plana se traza la recta tangente que corta al eje OY en el punto T. Si el punto O es el origen de coordenadas, encontrar la familia de curvas que verifican que la distancia entre los puntos O y T es la misma que la distancia entre los puntos T y P.

Solución: $u(x)^2 + x^2 = Cx$

3. Encontrar la familia de curvas en el primer cuadrante con la siguiente propiedad: la ordenada del punto de corte de la recta tangente a la curva con el eje OY es igual al cubo de la ordenada del punto de tangencia.

Solución: $y(x)^2 = \dfrac{x^2}{x^2+C}$

4. Encontrar la familia de curvas $u(x)$ situadas en el primer cuadrante, con $u(x) \not\equiv 0$, que tienen la siguiente propiedad: si P es un punto genérico de la curva y N es el punto de corte de la recta normal a la curva en P con el eje OX, el área del triángulo OPN es igual al producto de las coordenadas del punto P (O es el origen del sistema de referencia).

Solución: $u(x)^2 - x^2 = C$.

2. Familias de curvas ortogonales

Decimos que dos curvas son ***ortogonales*** cuando las rectas tangentes a las curvas en los puntos de intersección de ambas son perpendiculares. Mediante la resolución de ecuaciones diferenciales vamos a poder determinar la familia de curvas ortogonales a una familia dada.

Consideremos la familia de curvas que viene dada por la ecuación diferencial $y'(x) = F(x, y(x))$. Sea $y(x)$ la función que define una curva de esta familia. El valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y(x)$ en el punto $P = (x_0, y(x_0))$ es $\operatorname{tg}\alpha$ (ver Figura 5), es decir,

$$y'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha.$$

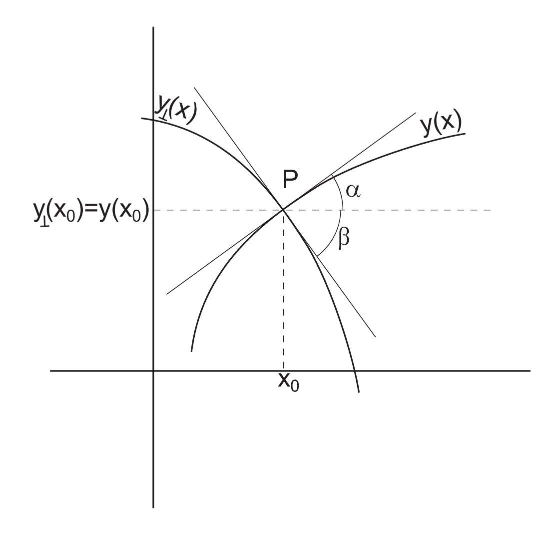


Figura 5: Curvas ortogonales en un punto P.

Sea $y_\perp(x)$ la función cuya gráfica es ortogonal a la gráfica de $y(x)$ en P. El valor de la pendiente de su recta tangente en el punto P es $\operatorname{tg}\beta$ (ver Figura 5), es decir,

$$y'_\perp(x_0) = \operatorname{tg}\beta.$$

Puesto que $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$, entonces $\operatorname{tg}\beta = -\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$. Por tanto,

$$y'_\perp(x_0) = -\frac{1}{y'(x_0)} = -\frac{1}{F(x_0, y(x_0))} = -\frac{1}{F(x_0, y_\perp(x_0))},$$

donde se ha utilizado que $y'(x_0) = F(x_0, y(x_0))$ y que $y(x_0) = y_\perp(x_0)$. Puesto que esta relación se verifica para cualquier punto de la forma $(x, y(x))$, entonces

$$y'_\perp(x) = -\frac{1}{F(x, y_\perp(x))}.$$

Por simplificar la notación, la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas ortogonales a la familia dada la escribiremos como

$$y'(x) = -\frac{1}{F(x, y(x))}.$$

Ejemplo 2.1 *Calcular la familia de curvas ortogonales a $x^2 + y^2 = C$ (circunferencias centradas en el origen).*

Supongamos que $y(x)$ es la función definida implicitamente por la ecuación $x^2 + y^2 = C$. En primer lugar hay que determinar la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas dada por $x^2 + y^2(x) = C$. Para ello, derivamos respecto de la variable x la ecuación $x^2 + y^2(x) = C$:

$$2x + 2y(x)y'(x) = 0.$$

Despejando $y'(x)$ obtenemos la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas inicial:

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}.$$

La ecuación diferencial de la familia ortogonal será, entonces,

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x}.$$

Se trata de una ecuación de variables separables que escribimos como

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{x}.$$

Integrando,

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}dx = \int \frac{1}{x}dx$$

resulta

$$\log y(x) = \log x + c = \log(Kx),$$

donde $c = \log K$. Despejando $y(x)$ se obtiene la familia uniparamétrica de curvas ortogonales a las circunferencias centradas en el origen y de radio constante que resulta ser una familia de rectas que pasan por el origen (ver Figura 6),

$$y(x) = Kx.$$

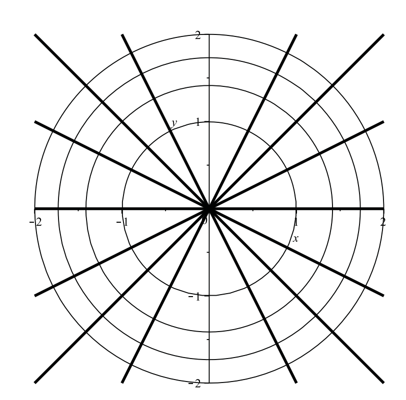


Figura 6: Familia de circunferencias y su familia ortogonal de rectas

Ejemplo 2.2 *Calcular la familia de curvas ortogonales a la familia de hipérbolas* $x^2 - y^2 = C$.

Derivando la ecuación de la familia de curvas en la que suponemos, igual que en el ejemplo anterior, que $y(x)$ es la función definida implícitamente por $x^2 - y^2 = C$ tenemos

$$2x - 2y(x)y'(x) = 0$$

y, por tanto, la ecuación diferencial asociada a la familia original de hipérbolas es

$$y'(x) = \frac{x}{y(x)}.$$

La ecuación diferencial asociada a su familia ortogonal será, entonces,

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{x}.$$

De nuevo tenemos una ecuación de variables separables que escribimos como

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{1}{x}.$$

Integrando,

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}dx = -\int \frac{1}{x}dx$$

resulta

$$\log y(x) = -\log x + c = -\log x + \log K = \log \frac{K}{x},$$

donde de nuevo llamamos $c = \log K$. Despejando $y(x)$ se obtiene la ecuación de la familia uniparamétrica que es ortogonal a la inicial,

$$y(x) = \frac{K}{x},$$

o equivalentemente, $xy = K$, que es otra familia de hipérbolas (ver Figura 7).

Ejemplo 2.3 *Obtener la ecuación diferencial asociada a familia de curvas planas* $x^2 + 2y^2 = Cx$. *Obtener la familia de curvas ortogonales a dicha familia y determinar, de todas ellas, la que pasa por el punto (1,1).*

Procediendo de manera análoga a los dos ejemplos anteriores, la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas planas $x^2 + 2y^2(x) = Cx$ se obtendrá derivando la ecuación escrita como

$$C = \frac{x^2 + 2y(x)^2}{x}.$$

Entonces,

$$0 = \frac{(2x + 4y(x)y'(x))x - (x^2 + 2y(x)^2)}{x^2}$$

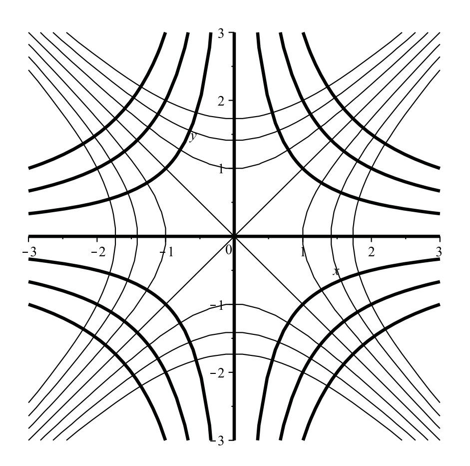


Figura 7: Familias de hipérbolas ortogonales.

de modo que, operando, la ecuación asociada a la familia de curvas inicial es

$$y'(x) = \frac{2y(x)^2 - x^2}{4xy(x)}.$$

De esta forma, la ecuación diferencial asociada a esta familia ortogonal es

$$y'(x) = \frac{4xy(x)}{x^2 - 2y(x)^2},$$

que, en este caso, se trata de una ecuación diferencial homogénea. Como ya es sabido, mediante el cambio de variable $v(x) = y(x)/x$ esta ecuación se convierte en la ecuación diferencial de variables separables

$$xv'(x) = \frac{3v(x) + 2v(x)^3}{1 - 2v(x)^2}$$

cuya integración permite obtener

$$-\frac{2}{3}\log(3 + 2v(x)^2) + \frac{1}{3}\log(v(x)) = \log(Kx).$$

Deshaciendo el cambio de variable y operando llegamos a la siguiente familia de curvas, familia ortogonal a la inicial (ver Figura 8):

$$y(x) = K(3x^2 + 2y(x)^2)^2.$$

Ahora, sustituyendo la condición inicial dada en el enunciado,

$$1 = y(1) = K(3 + 2)^2,$$

obtenemos la curva de la familia ortogonal que pasa por el (1,1):

$$y(x) = \frac{1}{25}(3x^2 + 2y(x)^2)^2.$$

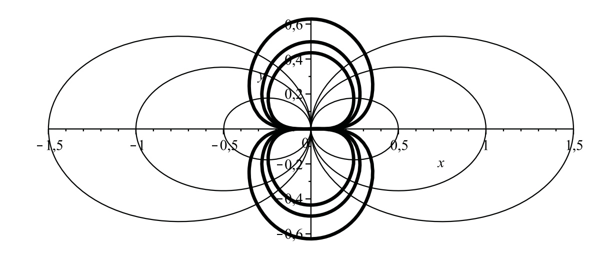


Figura 8: Familia de elipses y su familia ortogonal.

Ejercicios propuestos

1. Hallar la familia de curvas ortogonales a cada una de las familias de curvas dadas:

a. $y = \log Cx$ Solución: $y = -\frac{1}{2}x^2 + K = 0$

b. $y = Cx^2$ Solución: $\frac{x^2}{2} + y^2 = K$

c. $y = e^{Cx}$ Solución: $y^2(2\log y - 1) + 2x^2 = K$

2. Hallar la familia de curvas ortogonales a la familia de parábolas de eje OX que pasan por el origen de coordenadas. Solución: $y^2 + 2x^2 = C$

3. Otras aplicaciones

Veamos algún otro tipo de problemas fácilmente abordables mediante ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 3.1 *Calcular la ecuación de las curvas para las que los rayos horizontales que inciden sobre ellas se reflejan sobre un punto fijo.*

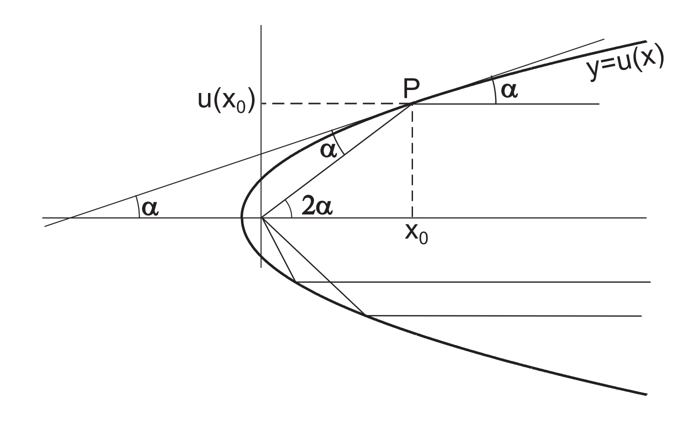


Figura 9: Interpretación geométrica.

Supongamos que $u(x)$ es la gráfica de la función de la curva buscada de tal forma que los rayos incidentes son paralelos al eje OX. Llamemos α al ángulo de incidencia y P al punto en el que inciden, $P = (x_0, u(x_0))$. Supongamos, también, que el punto fijo en el que se reflejan los rayos es, sin pérdida de generalidad, el origen del sistema de referencia. En estos términos, y según la Figura 9, tenemos que

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{u(x_0)}{x_0}. \tag{6}$$

Por otro lado, utilizando las igualdades trigonométricas

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

y dado que $u'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, podemos expresar la $\operatorname{tg} 2\alpha$ como

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2u'(x_0)}{1 - u'(x_0)^2}. \tag{7}$$

Igualando (6) y (7) y operando llegamos a la siguiente ecuación expresada para un punto genérico $(x, u(x))$,

$$u(x)u'(x)^2 + 2xu(x) - u(x) = 0. \tag{8}$$

Tras despejar $u'(x)$,

$$u'(x) = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 + u(x)^2}}{u(x)}. \tag{9}$$

Consideramos únicamente la rama creciente con $u(x) > 0$ (ver Figura 9); tenemos entonces que la ecuación diferencial que define la familia de curvas buscada es

$$u'(x) = \frac{-2x + \sqrt{4x^2 + u(x)^2}}{u(x)}, \tag{10}$$

que es una ecuación homogénea. Aplicando el cambio de variable $v(x) = \dfrac{u(x)}{x}$, la ecuación (10), expresada en términos de $v(x)$, queda

$$xv'(x) = \frac{-1 - v(x)^2 + \sqrt{1 + v(x)^2}}{v(x)}. \tag{11}$$

Separando variables e integrando en ambos miembros se tiene que

$$\int \frac{v(x)v'(x)dx}{-1 - v(x)^2 + \sqrt{1 + v(x)^2}} = \int \frac{1}{x} dx. \tag{12}$$

La integral del lado derecho de la igualdad es inmediata,

$$\int \frac{1}{x} dx = \log(Kx)$$

y la integral del lado izquierdo se puede calcular aplicando dos cambios de variable sucesivos; en primer lugar, el dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} v(x) = t, \\ v'(x)dx = dt, \end{array} \right.$$

y, a continuación

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^2 = 1 + t^2, \\ 2\omega d\omega = 2tdt, \end{array} \right.$$

de modo que

$$\int \frac{v(x)v'(x)dx}{-1 - v(x)^2 + \sqrt{1 + v(x)^2}} = \int \frac{tdt}{-(1 + t^2) + \sqrt{1 + t^2}} = \int \frac{\omega d\omega}{-\omega^2 + \omega} = -\log(1 - \omega).$$

Por tanto, una vez efectuada la integración de la igualdad (12) se obtiene que

$$-\log(1 - \omega) = \log(Kx)$$

y escrita en términos de $u(x)$, dicha igualdad se escribe como

$$\left(1 - \sqrt{1 + \frac{u(x)^2}{x^2}}\right)^{-1} = Kx.$$

Finalmente, operando, llegamos a que la familia de curvas que cumple la condición geométrica propuesta es una famila de parábolas definida por

$$u(x) = \pm\sqrt{C^2 - 2Cx}$$

con $C = 1/K$.

Ejemplo 3.2 *Un día de invierno, en un despacho de la E.T.S. de Arquitectura se mantiene la temperatura a* $22°C$ *mientras está funcionando la calefacción mediante bomba de calor. A las 14 horas se produce un corte en el suministro de electricidad. Una hora más tarde la temperatura en el despacho ha bajado a* $18°C$*. Supongamos que ese día la temperatura exterior es de* $2°C$ *y se mantiene constante. ¿A qué hora habrá bajado hasta* $14°C$ *la temperatura del despacho, suponiendo que la calefacción sigue sin funcionar?*

La ley empírica de enfriamiento o calentamiento de Newton establece que la rapidez con la que varía la temperatura de un cuerpo, $T(t)$, es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio que que le rodea, T_m, es decir,

$$T'(t) = K(T(t) - T_m)$$

donde K es la constante de proporcionalidad y $T(t)$ es, en nuestro caso, la temperatura del despacho en el instante de tiempo t.

Para poder resolver el problema se plantea el siguiente P.V.I.:

$$\left\{ \begin{array}{l} T'(t) = K(T(t) - 2), \\ T(0) = 22, \end{array} \right.$$

donde consideramos que el tiempo t está expresado en horas y la temperatura T en $°C$.

La solución de la ecuación diferencial, que es de variables separables, vendrá dada por

$$\int \frac{T'(t)dt}{T(t)-2} = \int K dt,$$

es decir,

$$\log(T(t)-2) = Kt + c$$

donde c es la constante de integración, o de manera equivalente,

$$T(t) = 2 + Ae^{Kt} \tag{13}$$

con $A = e^c$.

Imponiendo la condición inicial $T(0) = 22$ obtenemos el valor $A = 20$. Para obtener el valor de la constante de proporcionalidad K imponemos en (13) la condición de que al cabo de 1 hora la temperatura es de $18°C$,

$$18 = T(1) = 2 + Ae^K,$$

por lo que $K = \log \frac{4}{5}$. Con esto, la función que define la evolución de la temperatura en el despacho es

$$T(t) = 2 + 20\left(\frac{4}{5}\right)^t. \tag{14}$$

Si queremos averiguar en qué momento la temperatura del despacho es de $14°C$, basta despejar la variable t de la ecuación

$$14 = 2 + 20\left(\frac{4}{5}\right)^t$$

obteniéndose que

$$t = 2.289 \text{ horas}.$$

Por tanto, a las 16 horas y 17 minutos se alcanzarán los $14°C$.

Ejemplo 3.3 *Una mañana empezó a nevar y así continuó haciéndolo regularmente durante todo el día. A las 14 horas empezó a trabajar una máquina quitanieves con una potencia constante y recorrió 2 km en la primera hora y 1 km en la segunda. ¿A qué hora comenzó a nevar?*

Vamos a suponer que la altura de la nieve en cada instante de tiempo t es proporcional al periodo de tiempo transcurrido desde que empezó a nevar, es decir,

$$s(t) = K(t - t_0)$$

donde estamos denotando por $s(t)$ la altura de la nieve en el instante de tiempo t (en horas) y t_0 al instante en el que comienza a nevar. Si consideramos que $t = 0$ corresponde a las 14 horas, entonces t_0, que representa un instante anterior, será $t_0 < 0$.

Si $u(t)$ es la distancia en kilómetros que ha recorrido la máquina quitanieves en el tiempo t, $u(0) = 0$, y $u'(t)$ será la velocidad de la máquina, que es inversamente proporcional a la altura de la nieve:

$$u'(t) = \frac{A}{s(t)} = \frac{A}{K(t - t_0)}.$$

Esta ecuación diferencial es de variables separables y su solución, obtenida de manera inmediata, es

$$u(t) = \frac{A}{K} \log(t - t_0) + C. \tag{15}$$

Para determinar la constante de integración C imponemos como condición inicial $u(0) = 0$ y se obtiene para C el valor

$$C = -\frac{A}{K} \log(-t_0)$$

de modo que (15) se escribe como

$$u(t) = \frac{A}{K} \left(\log(t - t_0) - \log(-t_0)\right) = \frac{A}{K} \log\left(1 - \frac{t}{t_0}\right). \tag{16}$$

Para determinar el instante en el que comenzó a nevar, esto es, t_0, utilizamos las condiciones dadas en el enunciado para $u(t)$,

$$\begin{cases} u(1) = 2, \\ u(2) = 3, \end{cases}$$

obteniendo

$$\begin{cases} 2 = \dfrac{A}{K} \log\left(1 - \dfrac{1}{t_0}\right), \\ 3 = \dfrac{A}{K} \log\left(1 - \dfrac{2}{t_0}\right). \end{cases}$$

Dividiendo ambas ecuaciones,

$$\frac{2}{3} = \frac{\log\left(1 - \dfrac{1}{t_0}\right)}{\log\left(1 - \dfrac{2}{t_0}\right)}$$

y operando, se llega a la ecuación de segundo grado en t_0,

$$t_0^2 - t_0 - 1 = 0$$

de la cual sólo nos interesa la solución negativa, siendo ésta

$$t_0 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Dando como valor aproximado de $t_0 = -0.6180$ horas$= -37$ minutos y 5 segundos, la hora a la que empieza a nevar es a las 13 horas, 22 minutos y 55 segundos.

4. Ejercicios resueltos con Maple

Ejercicio 1. *Encontrar la familia de curvas ortogonales a la familia de curvas planas*

$$x^2 + y^2 - Cy = 0.$$

Representar gráficamente ambas familias.

En primer lugar, cargamos los paquetes necesarios:

```
> restart:with(plots):with(student):
```

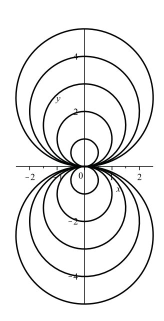
Definimos la familia de curvas inicial que es una familia de circunferencias con sus centros situados en el eje OY;

```
> curvas:=x^2+y^2-C*y=0;
```

$$curvas := x^2 + y^2 - Cy = 0$$

Su representación gráfica la podemos hacer como sigue:

```
> familia_inicial:=seq(implicitplot(curvas, x=-4..4,y =-6..6,color=blue,
thickness=2,numpoints=10000),C =-5..5):
> display(familia_inicial);
```



A continuación, buscamos la ecuación diferencial de la familia de curvas, para lo cual despejamos la constante C:

```
> solve({curvas},{C});
```

$$\left\{C = \frac{x^2 + y^2}{y}\right\}$$

Para poder derivar en ambos lados de la expresión, hay que indicar que y es una función $y(x)$; para ello, le asignamos un nombre a la expresión anterior y posteriormente sustituimos y por $y(x)$:

```
> C1:=C=(x^2+y^2)/y;
```

$$C1 := C = \frac{x^2 + y^2}{y}$$

```
> constante:=eval(C1,y=y(x));
```

$$constante := C = \frac{x^2 + (y(x))^2}{y(x)}$$

```
> diff(constante,x);
```

$$0 = \frac{2\,x + 2\,y\left(x\right)\frac{d}{dx}y\left(x\right)}{y\left(x\right)} - \frac{\left(x^2 + \left(y\left(x\right)\right)^2\right)\frac{d}{dx}y\left(x\right)}{\left(y\left(x\right)\right)^2}$$

La ecuación diferencial que define la familia de curvas inicial se obtiene despejando $\frac{d}{dx}y\left(x\right)$ en la expresión anterior:

```
> ecu_1:=%;
```

$$ecu_1 := 0 = \frac{2\,x + 2\,y\left(x\right)\frac{d}{dx}y\left(x\right)}{y\left(x\right)} - \frac{\left(x^2 + \left(y\left(x\right)\right)^2\right)\frac{d}{dx}y\left(x\right)}{\left(y\left(x\right)\right)^2}$$

```
> solve(ecu_1,diff(y(x),x));
```

$$-2\,\frac{y\left(x\right)x}{\left(y\left(x\right)\right)^2 - x^2}$$

Es decir, que la ecuación diferencial de la familia inicial es:

```
> ecu_familia_inicial:=diff(y(x), x) = -2*y(x)*x/(y(x)^2-x^2);
```

$$ecu_familia_inicial := \frac{d}{dx}y\left(x\right) = -2\,\frac{y\left(x\right)x}{\left(y\left(x\right)\right)^2 - x^2}$$

y por tanto, la ecuación que define la familia ortogonal será:

```
> ecu_familia_ortogonal:=diff(y(x),x)=-1/(-2*y(x)*x/(y(x)^2-x^2));
```

$$ecu_familia_ortogonal := \frac{d}{dx}y\left(x\right) = 1/2\,\frac{\left(y\left(x\right)\right)^2 - x^2}{y\left(x\right)x}$$

Es una ecuación diferencial homogénea y la resolvemos utilizando el cambio de variable $v\left(x\right) = \frac{y\left(x\right)}{x}$

```
> ec:=changevar(y(x)=x*v(x), ecu_familia_ortogonal);
```

$$ec := v\left(x\right) + x\frac{d}{dx}v\left(x\right) = 1/2\,\frac{\left(v\left(x\right)\right)^2 - 1}{v\left(x\right)}$$

Despejando

```
> diff(v(x),x)=solve(ec,diff(v(x),x));
```

$$\frac{d}{dx}v\left(x\right) = -1/2\,\frac{\left(v\left(x\right)\right)^2 + 1}{xv\left(x\right)}$$

Ahora se ha convertido en una E.D.O. de variables separables, de modo que,

```
> Int(2*v/(v^2+1),u)=(-1)*Int(1/x,x);
```

$$\int 2\,\frac{v}{v^2+1}du = -\int x^{-1}dx$$

Integrando,

```
> Int(2*v/(v^2+1),v)=int(2*v/(v^2+1),v);
```

$$\int 2\,\frac{v}{v^2+1}dv = \ln\left(v^2+1\right)$$

```
> (-1)*Int(1/x,x)=(-1)*int(1/x,x)+C;
```

$$-\int x^{-1}dx = -\ln\left(x\right) + C$$

e igualando ambas expresiones,

```
> ln(v^2+1)=-ln(x)+C;
```

$$\ln\left(v^2+1\right) = -\ln(x) + C$$

Aplicando la función exponencial en ambos miembros de la ecuación anterior llegamos a la solución de la ecuación diferencial escrita en términos de v:

```
> exp(ln(v^2+1))=exp(-ln(x)+C);
```

$$v^2+1 = \mathrm{e}^{-\ln(x)+C}$$

```
> simplify(%);
```

$$v^2+1 = \frac{\mathrm{e}^C}{x}$$

Para deshacer el cambio, asignamos en primer lugar un nombre de variable a esta expresión y después sustituimos $v(x)$ por $y(x)/x$

```
> sol_v1:=v^2+1 = exp(C)/x;
```

$$sol_v1 := v^2+1 = \frac{\mathrm{e}^C}{x}$$

```
> eval(sol_v1,v=y/x);
```

$$\frac{y^2}{x^2}+1 = \frac{\mathrm{e}^C}{x}$$

Llamando

```
> sol_v2:=eval(y^2/x^2+1 = exp(C)/x,exp(C)=K);
```

$$sol_v2 := \frac{y^2}{x^2}+1 = \frac{K}{x}$$

```
> simplify(%);
```

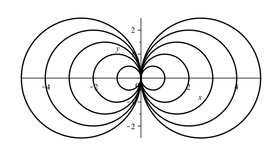
$$\frac{x^2+y^2}{x^2} = \frac{K}{x}$$

llegamos a la expresión de la familia de curvas ortogonales a la familia inicial, que resulta ser una familia de circunferencias con sus centros situados en el eje OX. Su representación gráfica se puede realizar así:

```
> familia_ortogonal:=x^2+y^2=K*x;
```

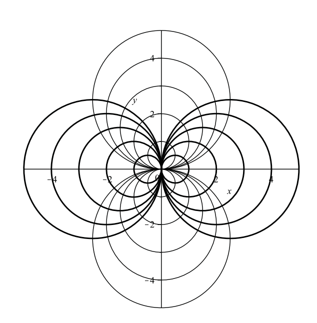
$$familia_ortogonal := x^2+y^2 = Kx$$

```
> familia_orto:=seq(implicitplot(familia_ortogonal,x=-6..6,y=-4..4,color=red,
thickness=2,numpoints=10000), K = -5 .. 5):
> display(familia_orto);
```



Finalizamos el ejercicio representando gráficamente ambas familias:

```
> display(familia_inicial,familia_orto);
```



Ejercicio 2. *Encontrar la familia de curvas ortogonales a la familia de parábolas*

$$1 + Cy^2 = 4x.$$

Representar gráficamente ambas familias.

```
> restart:with(plots):with(student):
```

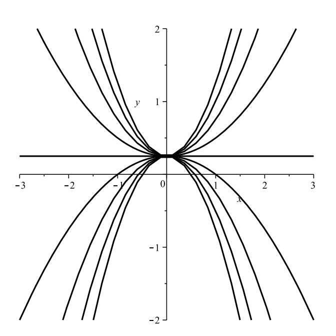
Definimos la familia de parábolas inicial:

```
> parabolas:=1+C*x^2=4*y;
```

$$parabolas := 1 + Cx^2 = 4\,y$$

Su representación gráfica es:

```
> familia_parabolas:=seq(implicitplot(parabolas,x=-3..3,y=-2..2,color=red,
thickness=2),C=-4..4):
> display(familia_parabolas);
```



Buscamos, ahora, la ecuación diferencial de esta familia de curvas:

```
> solve({parabolas},{C});
```

$$\left\{ C = \frac{-1 + 4\,y}{x^2} \right\}$$

De manera análoga al ejercicio anterior, sustituimos la variable y por la función $y\,(x)$ antes de derivar en ambos lados de la igualdad:

```
> C1:=C=(-1+4*y)/x^2;
```

$$C1 := C = \frac{-1+4\,y}{x^2}$$

```
> constante:=eval(C1,y=y(x));
```

$$constante := C = \frac{-1+4\,y(x)}{x^2}$$

```
> diff(constante,x);
```

$$0 = 4\,\frac{\frac{d}{dx}y(x)}{x^2} - 2\,\frac{-1+4\,y(x)}{x^3}$$

Despejamos

```
> ecu_1:=%;
```

$$ecu_1 := 0 = 4\,\frac{\frac{d}{dx}y(x)}{x^2} - 2\,\frac{-1+4\,y(x)}{x^3}$$

```
> solve({ecu_1},{diff(y(x), x)});
```

$$\left\{\frac{d}{dx}y(x) = 1/2\,\frac{-1+4\,y(x)}{x}\right\}$$

Por tanto, la ecuación que define la familia de parábolas inicial es

```
> ecu_familia_parabolas:=diff(y(x), x) = (1/2)*(-1+4*y(x))/x;
```

$$ecu_familia_parabolas := \frac{d}{dx}y(x) = 1/2\,\frac{-1+4\,y(x)}{x}$$

con lo que la familia ortogonal tendrá como ecuación diferencial asociada

```
> ecu_familia_ortogonal:=diff(y(x),x)=-1/((1/2)*(-1+4*y(x))/x);
```

$$ecu_familia_ortogonal := \frac{d}{dx}y(x) = -2\,\frac{x}{-1+4\,y(x)}$$

Esta ecuación diferencial es de variables separables; agrupamos dichas variables e integramos:

```
> Int(-1+4*y,y)=Int(-2*x,x);
```

$$\int -1+4\,y dy = \int -2\,x dx$$

esto es,

```
> int(-1+4*y,y)=int(-2*x,x)+C;
```

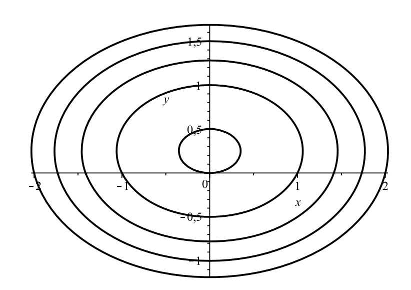
$$-y+2\,y^2 = -x^2 + C$$

y ya hemos obtenido la familia ortogonal buscada. Se trata de una familia de elipses:

```
> familia_ortogonal:=x^2+2*y^2-y=C;
```

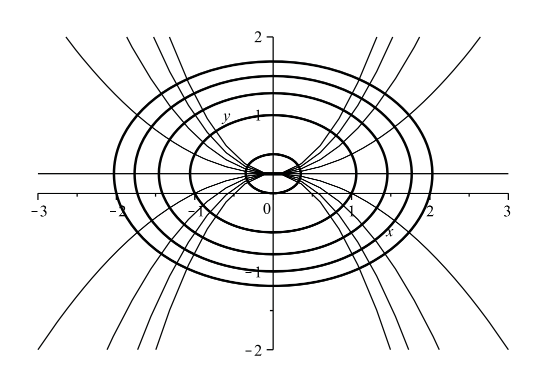
$$familia_ortogonal := x^2 + 2\,y^2 - y = C$$

```
> familia_orto:=seq(implicitplot(familia_ortogonal,x=-3..3,y=-2..2,color=blue,
thickness=2,numpoints=10000),C=-4..4):
> display(familia_orto);
```



Finalmente mostramos la representación gráfica de ambas familias:

```
> display(familia_parabolas,familia_orto);
```



Ejercicios propuestos

1. Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' + y \operatorname{tg} x = y^{-3} x \cos^2 x \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

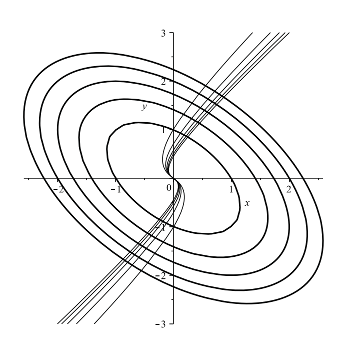
Solución: $y(x) = (4x \operatorname{sen} x \cos^3 x + 4\cos^4 x \log(\cos x) + 16\cos^4 x)^{1/4}$

2. Hallar la familia de curvas ortogonales a la familia de hipérbolas dada por

$$x^2 + xy + y^2 = C.$$

Representar gráficamente ambas familias.

Solución: $(y + x) = K(y - x)^3$



3. Encontrar la familia de curvas situadas en el primer cuadrante que cumplan la siguiente propiedad: si Q es el punto de corte con el eje OY de la recta tangente a la curva en un punto cualquiera P y R es el punto de corte con el eje OX de la recta normal a la curva en el mismo punto P, la ordenada de Q es el doble de la abcisa de R.

Solución: $\log\left[\dfrac{u(x)^2}{x^2}+1\right]^{1/2}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{u(x)}{x}\right)=\log\dfrac{K}{x}$

4. Encontrar la familia de curvas situadas en el primer cuadrante que cumplan la siguiente propiedad: si Q es el punto de corte con el eje OX de la recta tangente a la curva en un punto cualquiera P, el punto medio del segmento $\overline{PQ}$ pertenece a la recta $y = 2x$. De todas ellas, determinar la que pase por el punto (2,1).

Solución: $u(x) - 2x = Ku(x)^2, \qquad u(x) - 2x = -3u(x)^2$

Bibliografía

[1] D.G. Zill. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado.* Thomson Learning, 2002.

[2] A García, F. García, A. López, G. Rodríguez y A. de la Villa. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Teoría y problemas* Ed. CLAGSA.

[3] A. Kiseliov, M. Krasnov, G. Makarenko. *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.* Mir, 1992.

[4] W. Boyce di Prima. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera.* Limusa, 1998.

[5] F. Rincón, A. García, A. Martínez. *Cálculo Científico con MAPLE.* Ed. RA–MA.

NOTAS

CUADERNO



Cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

